



2. 能否找出 5 個連續的正整數，使得其中兩個數的平方之和是餘下三個數的平方之和？試證明你的結論是正確的。

Can you find 5 consecutive positive integers such that the sum of the squares of two of them is equal to the sum of the squares of other 3 numbers? Prove that your answer is correct.

3. 求證方程  $x^3 + y^3 = 2020$  沒有整數解。

Prove that the equation  $x^3 + y^3 = 2020$  has no integral solutions.

4. 設  $a, b$  為非負實數使得  $a + b \leq 2$ ，求證以下不等式成立：

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}.$$

Let  $a, b$  be non-negative real numbers such that  $a + b \leq 2$ . Prove that

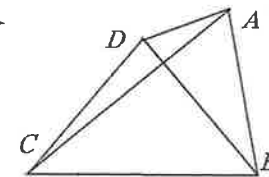
$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}.$$

5. 在以下的  $3 \times 3$  表格的 9 個方格分別填入 9 個正整數，使得在任一系列或任一行的三個數之和都是 5。求兩兩不相同的填法的總個數  $N$ 。


Fill in the 9 cells of a  $3 \times 3$  table above with 9 positive integers, such that the sum of 3 numbers in any column or in any row is 5. Determine the number  $N$  of different ways of filling in 9 numbers.

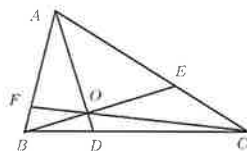
6. 如右圖所示，已知  $\angle BAD = \angle ABC = \angle BDC$  及  $\angle CBD = \angle BCD = 50^\circ$ 。求證  $AC$  垂直  $BD$ 。  
In the right figure,  $\angle CBD = \angle BCD = 50^\circ$ , and  $\angle BAD = \angle ABC = \angle BDC$ .

Prove that  $AC$  is perpendicular to  $BD$ .



II 選擇題 每題 5 分 Multiple Choice Questions 5 marks each

7. 有關六位數  $N = \overline{XYZXYZ}$ ，以下哪個不成立：  
Which of following about 6-digit number  $N = \overline{XYZXYZ}$  is incorrect:
- A.  $7 \mid N$  B.  $11 \mid N$  C.  $13 \mid N$  D.  $17 \mid N$  E. 以上皆非 None of the above.
8. 設素數  $p, q, r$  滿足  $r - p^q = 1$ ，求  $p + q + r$ 。  
Let  $p, q, r$  be prime numbers satisfying  $r - p^q = 1$ , find  $p + q + r$ .
- A. 11 B. 12 C. 13 D. 14 E. 以上皆非 None of the above.
9. 設  $N$  為滿足  $x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3$  的有序實數對  $(x, y)$  的個數。求  $N$ 。  
Let  $N$  be the number of ordered pairs  $(x, y)$  of real numbers such that  $x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3$ . Find  $N$ .
- A. 6 B. 4 C. 2 D. 0 E. 以上皆非 None of the above.
10. 已知  $a + b + c = 0$  及  $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ ，求  $a^4 + b^4 + c^4$ 。  
If  $a + b + c = 0$  and  $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ , find  $a^4 + b^4 + c^4$ .
- A. 4 B. 8 C. 12 D. 16 E. 以上皆非 None of the above.
11. 如右圖，計算  $\frac{DO}{DA} + \frac{EO}{EB} + \frac{FO}{FC}$ 。  
In the right figure, find  $\frac{DO}{DA} + \frac{EO}{EB} + \frac{FO}{FC}$ .
- A.  $\frac{1}{3}$  B.  $\frac{1}{2}$  C.  $\frac{2}{3}$  D. 1  
E. 以上皆非 None of the above.



III 填空题 每題 8 分 Fill-in-blank Questions 8 marks each

12. 設  $p$  為素數， $m$  為整數使得  $p^m + 4$  是完全平方數。求  $p + m$ 。  
Let  $p$  be a prime and  $m$  be an integer such that  $p^m + 4$  is perfect square.  
Find  $p + m$ .

$p + m =$

13. 試求滿足  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$  及  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = 10$  的所有實數對  $(a, b)$ 。

Find all pairs  $(a, b)$  of real numbers such that  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$  and  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = 10$ .

$(a, b) =$

14. 試找出不能表示為三個素數之和的最小兩位數  $N$ 。

Find the least 2-digit number  $N$  which is not a sum of 3 primes.

$N =$

15. 因式分解  $(ay + bx)^3 - (ax + by)^3 + (a^3 - b^3)(x^3 - y^3)$ 。

Factorize  $(ay + bx)^3 - (ax + by)^3 + (a^3 - b^3)(x^3 - y^3)$ .

16. 試求滿足  $ab^3 = -135$  及  $(a + b)b = -6$  的所有實數對  $(a, b)$ 。

Find all pairs  $(a, b)$  of real numbers such that  $ab^3 = -135$  and  $(a + b)b = -6$ .

$(a, b) =$

17. 試給出一組正整數  $(x, y)$  使得  $x^2 + y^2 = 2020$ 。

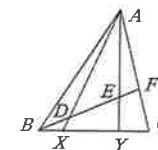
Find a pair  $(x, y)$  of positive integers such that  $x^2 + y^2 = 2020$ .

$(x, y) =$

18. 如右圖所示  $BX : XY : YC = 1 : 2 : 1$  及  $AF : FC = 2 : 1$ 。

求  $BD : DE : EF$ 。

As shown in right figure,  $BX : XY : YC = 1 : 2 : 1$ , and  $AF : FC = 2 : 1$ . Find  $BD : DE : EF$ .



$BD : DE : EF =$

19. 考慮常數  $k$  使得方程  $(k^2 - 1)x^2 - 6(3k - 1)x + 72 = 0$  的根全是正整數，求所有可能的常數  $k$  的總和  $S$ 。

Consider constant  $k$  such that all roots of  $(k^2 - 1)x^2 - 6(3k - 1)x + 72 = 0$  are positive integers, find the sum  $S$  of all possible  $k$ 's.

$S =$