2017 年高一組姓名：________________ 學校：________________

- 1-5 題是填空題，把答案寫在空白的 $A4$ 紙上
- 1-5 題是證明題，把證明過程仔細寫在空白的 $A4$ 紙上
- 在每張 $A4$ 答案紙上都填寫姓名，年級及學校名稱

1. (7 分) 座標平面上與點 $A(1,2)$ 距離為 1，且與點 $A(3,1)$ 距離為 2 的直線有 ____ 條。

2. (8 分) 若 $x,y\in(0,\pi/2)$ 且 $\sin x=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 及 $\sin y=\frac{1}{\sqrt{10}}$，則 $x+y=$ ____。

3. (10 分) 若正數 a、b 滿足 $a^2+\frac{b^2}{2}=1$，則 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值是 ____。

4. (10 分) 請將 $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}+1}$ 化成 $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$ 的形式，其中 a,b,c 為有理數)。

5. (10 分) 當 θ 在 $[0,2\pi]$ 之間變動，確定函數 $P(\theta)$ 的取值範圍，其中
$$P(\theta)=3\cos\theta+3\sin\theta+4\sin\theta\cos\theta。$$

6. (15 分) 設 A 為 8-元集合，若 F 是 A 中一族兩兩不同的 3-元子集，使得 F 中任意兩個子集的交集不是 2-元集合。試求 $|F|$ 的最大值。

7. (15 分) 對任意的正有理數 x，求證存在有限長的整數數列 $a_1,a_2,\cdots,a_k$, 滿足以下兩個條件：(a) 對於 $2\le n\le k$，有 $0\le a_n\le n-1$；
(b) $x=a_1+\dfrac{a_2}{2!}+\dfrac{a_3}{3!}+\cdots+\dfrac{a_k}{k!}$。

8. (15 分) 在凸四邊形 $ACGE$ 中，直線 AG 與 CE 交於點 H，直線 AE 與 CG 交於點 I，直線 AC 與 EG 交於點 D，直線 IH 與 AC 交於點 B。求證：$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$。

2017 年高二及高三組姓名：________________ 學校：________________

- 1-5 題是填空題，把答案寫在空白的 $A4$ 紙上
- 1-5 題是證明題，把證明過程仔細寫在空白的 $A4$ 紙上
- 在每張 $A4$ 答案紙上都填寫姓名，年級及學校名稱

1. (7 分) 座標平面上與點 $A(1,2)$ 距離為 1，且與點 $B(4,5)$ 距離為 2 的直線有 ____ 條。

2. (8 分) 正數 x,a,b 滿足 $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$，試用 a,b 表示 $\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}$ 。

3. (10 分) 對任意正整數 n，試用 n 來表示和式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n(\frac{k\pi}{n})$。

4. (10 分) 請將 $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}+1}$ 化成 $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$ 的形式，其中 a,b,c 為有理數)。

5. (10 marks) 實數 x、y、z 滿足 $xyz=32$ 及 $x+y+z=4$ ，求 $|x|+|y|+|z|$ 的最小值。

6. (15 分) 在一組翻譯員中，每人都會一種或多種語言，其中 24 人會說日本語，24 人會說中文，及 24 人會說英文。求證：可在這組人中選出一些人，使得恰好 12 人會說日本語，恰好 12 人會說中文，及恰好 12 人會說英文。

7. (15 marks) 點 D、E 分別位於 $\triangle ABC$ 的邊 AC 、AB 上。點 F 、G 分別為線段 BC 、ED 上的點使得 $BF:FC=EG:GD=BE:CD$。求證 GF 平行 $\angle BAC$ 的平分線。

8. (15 marks) 試求滿足方程 $x^3+27xy+2009=y^3$ 的所有整數解對 (x,y)。