

小学数学概念教学的基本策略

周新林
北京师范大学认知神经科学与学习国家重点实验室
2013-05-12

1. 数学概念的地位

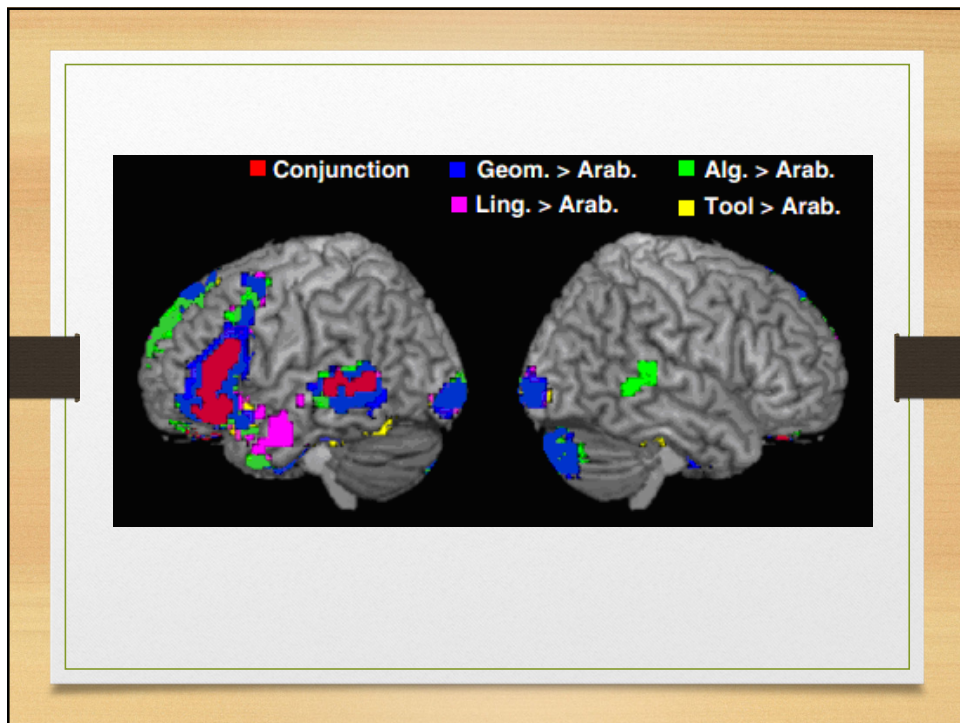
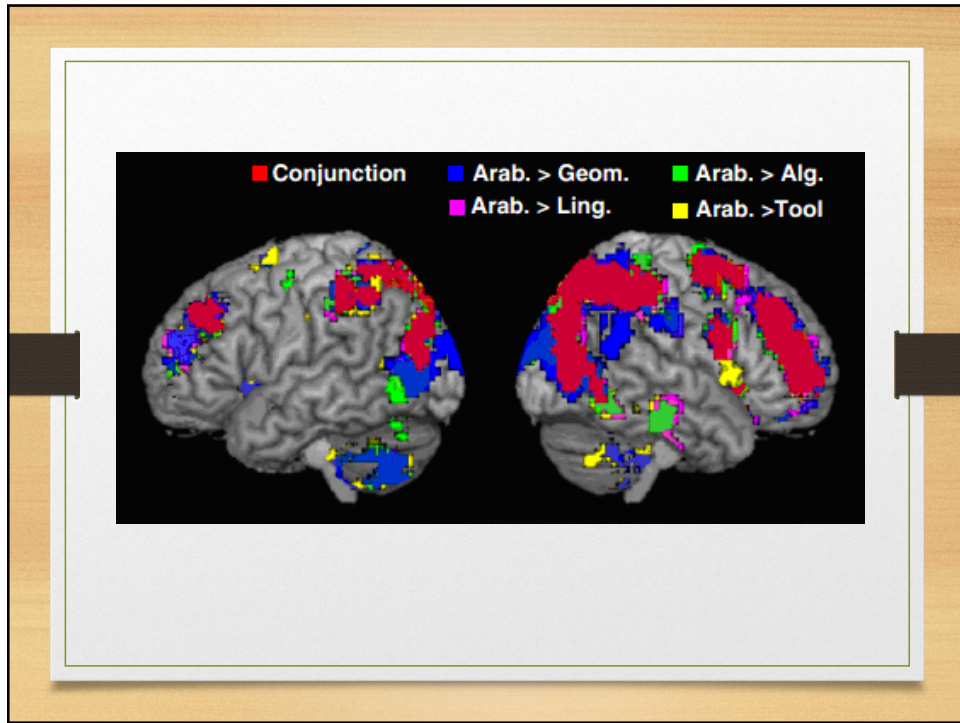
• 什么是数学概念

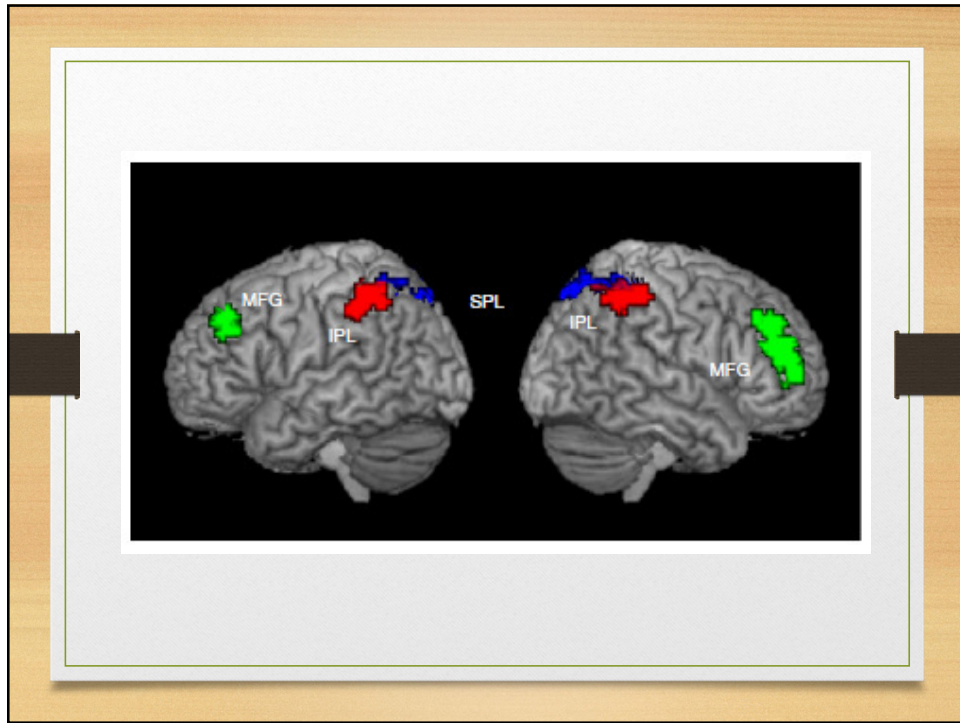
- 数学概念一种基本数学知识，反映客观事物在数量关系和空间形式上的本质属性
- 数学概念是反映客观事物在数量关系和空间形式上的本质属性的思维形式。

• 根据脑科学证据，数学概念分为三种：

- 数概念
- 代数概念
- 几何概念







三种基本的数学能力

- 计算流畅性（记忆）与计算
- 数学概念
- 问题解决

计算能力和解答应用题能力的培养，是以概念教学为基础的。

2. 小学概念教学的基本现状

- 数学概念探究课大体存在两种倾向：
 - 一种是只注重知识的来龙去脉的完整探究,而不关注学生认知发展,探究过程“原始”而“烦琐”，“什么都要算一算,量一量”；
 - 另一种是“去数学化”的探究,注重学生动手,讨论,情景设置等外部探究活动,忽略了数学本身的内在本质特点，结果探究归探究,数学归数学,二者相背离。

例如“分数”概念的教学中

- 对平均分的处理：
 - 数学化的平均分(如对折)
 - 生活中的平均分(以估算为基础)
 - 吃披萨

生活

数学

3. 概念教学的一般过程

(1)、**概念引入**：以生活情境和已有数学知识为基础

(2)、**概念形成**：解读关键字、兼顾内涵与外延

(3)、**概念深化**：建立概念体系、应用概念

(1)、概念引入

• 从生活情境中的问题引入

- 在学习四年级“生活中的负数”概念，学生头脑中关于负数“原型”是多样的：电梯中的地下层、存折中的取款、股票中的跌势……这些原型生活化，对学生理解和掌握概念起着重要作用。
- 人们经常认为，只有小学生才需要具体事例，其实，所以阶段的所有学习过程都需要生活经验的支持；

- 小学生思维活跃，对有兴趣的问题会积极思考，利用这一方面，教师可以建立情境然后提出疑问引导学生对所学概念有初步认识。例如，“体积”概念的学习，可以拿来一杯水，然后往杯中扔个石子，让学生思考为什么石子丢入杯中会有水溢出，这样学生对石块占了水的空间有了感性认识从而引出“体积”，情境建设不仅激发学生的学习欲望，更能够培养学生通过观察提出问题的坏习惯。

- **从已有数学知识中的问题引入**

- 数学概念之间的联系是十分紧密的，中高年纪的概念学习可以通过之前的基础知识引入，在学习“质数与合数”这一概念时可以通过回忆约数的概念来开展，让学生观察1, 2, 6, 7, 8, 11, 12, 15 的所有约数，给出一个分类，从而引出质数与合数。

- 有些概念不便于用具体事例来说明，而通过计算才能揭示数与形的本质属性。如：循环小数的概念可通过 $10 \div 3 = 3.3333\cdots$ 和 $70.7 \div 33 = 2.4242\cdots$ 两个计算引入，倒数的概念可通过 $(1/5) \times 5 = 1$ 及 $(2/7) \times (7/2) = 1$ 引入。

(2)、概念的形成

- A. 名称、定义（内涵）和样例（外延）
 - 内涵是指一个概念所概括的思维对象本质特有的属性的总和；
 - 外延是指是指一个概念所概括的思维对象的数量或者范围。

- 概念需要有准确的名称

$$4-2=2$$

$$4+2=6$$

$$4 \times 6 = 24$$

B. 突出样例的变式教学

- 运用表面特征或者非本质特征尽量不同的样例
 - 梯形的高

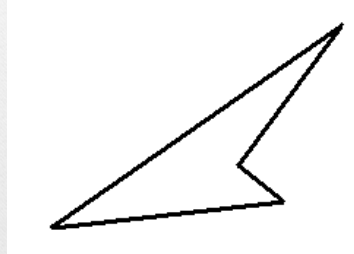


- 跷跷板游戏是平移还是旋转？
 - 教学结束后有2/3说是旋转，1/3说是平移



这是四边形吗？

- 2/3 的学生说不是



C. 对本质属性要变换表达方式去理解概念

- 为使学生真正理解概念，有时需从不同角度揭示概念的本质属性。可用不同的方法，不同的语言去描述，或用不同的方法表达，用不同的图形去演示。例如：
 - 最简分数可说成分子分母是互质数的分数，也可说成分子分母只有公约数1 的分数。
 - 等边三角形除了用“三条边都相等的三角形定义外，还可以用三个角都相等，三个角都等于60 度，顶角是60 度的等腰三角形表述方式来揭示它的本质属性。使学生从不同的侧面来理解概念。

D. 突出对概念的知觉

- 引入“千克”和“克”，有两种方法去知觉：实物称重和掂量的方法，哪一个更好？

(3) 概念深化

- 数学知识有很强的系统性，许多概念之间都是相互联系的，形成一定的知识系统。概念教学也要贯彻系统性的原则，学完一类概念后，要进行知识串联，把新概念纳入某一部分的系统中去理解。
- 例如：长方形、正方形、梯形、平行四边形都是四边形，但是他们又相互区别。老师在教学完梯形之后，要对四种有联系又有区别的四边形进行分析比较，从而加深学生对四种四边形的理解。

- 例如，我们在教学“众数”后，可以设计这样一个问题情境：有一家公司，经理的月工资是8000元，2个部门主管每人的月工资是5000元，10个工人每人的月工资是1500元，你要选择用平均数、中位数、还是众数来反映这个公司员工的月工资水平，并说明理由。
- “A路车、B路车第一次在5:00同时发车，A路车3分钟发一班，B路车4分钟发一班，何时第二次同时发车？”；需要运用最小公倍数

4. 几种常见的概念教学模式

(1) 概念同化教学模式

基本操作过程如下：

- ① 呈现概念。揭示概念的本质属性,给出定义、名称和符号；
- ② 解析概念外延。对概念进行特殊分类,揭示概念的外延；
- ③ 解析概念内涵。巩固概念,利用概念的定义进行简单的识别活动；
- ④ 应用概念。用概念解决问题,并建立所学概念与其它概念间的联系。

举例：《认识负数》

• 第一步：呈现概念

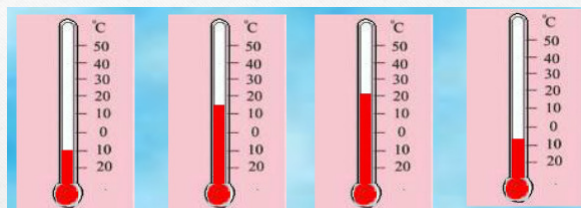
借助温度计的认识，呈现出生活应用中负数的概念：
即0刻度线以下的数（温度）为负数（零下多少度？），
用减号“-”表示，读作负多少？（负1度，相对应的就有正1度。）。

• 第二步：解析概念外延

- 1) 从性质上看：负数是相对的，对应概念即为正数；
- 2) 从大小上看：负数 $< 0 <$ 正数；所以，0既不是负数，也不是正数；

• 第二步：解析概念外延

根据季节，寻找生活中对应的负数；



第一季度 第二季度 第三季度 第四季度

你们还可以想到其他生活中既有正数，又有负数的例子吗？

• 第三步：解析概念内涵

- 负数是数学术语，指小于0的实数，如-3。负数是同绝对值正数的相反数。任何正数前加上负号都等于负数。在数轴线上，负数都在0的左侧，所有的负数都比自然数小。

• 第四步 应用概念

【学会用正负数的意义，通过添加正负号，说出数字的不同的实际含义】

例如：海拔 100m； 温度10度；楼层的高度（1层）



青海省祁连山的
海拔高度是4000m.



太平洋最深处的
海拔高度是-11022m.

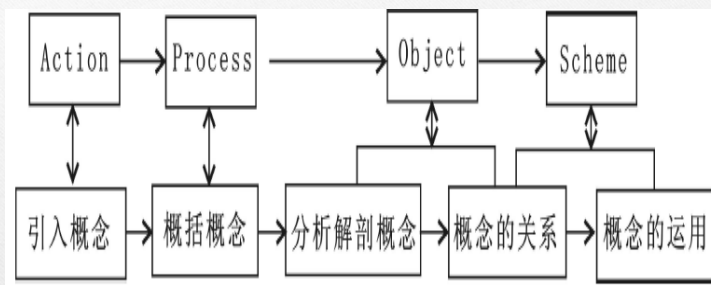
【评价】

省时、省力而见效快，被称为是“学生获得概念的最基本方式”，但容易忽视了数学概念本身所蕴含的现实背景，对概念的形成过程没有充分的体验。之后针对上述模式进行改进的做法亦多是侧重在强调概念的来龙去脉；强调概念体系；强调学生对概念学习过程的认识。如：通过实例或其他方式介绍概念的产生背景，并引导学生寻找、发现其固有的本质属性。

(2) APOS 理论

这一理论模型是由美国的杜宾斯基等人在数学教育实践中发展起来的一种数学概念教学模式。其理论基础是建基在建构主义教学理论之上的，强调将数学概念的建立分为活动（Action）—过程（Process）—对象（Object）—图式（Scheme）四个阶段。

- ① **活动阶段(Action)**:亲身体验、感受概念的直观背景和概念间的关系。通过操作活动,理解概念的意义。
- ② **过程阶段(Process)**:对“操作”进行思考,经历思维的内化、提炼过程,在头脑中进行描述和反思,抽象出概念所特有的性质。
- ③ **对象阶段(Object)**:认识概念本质,对其赋予形式化的定义及符号,使其达到精致化,成为一个具体的对象。
- ④ **图式阶段(Scheme)**:反映概念的定义及符号,建立与其它概念、规则、图形的联系,形成综合的心理图式。



同样的例子：《认识负数》

- 第一阶段：通过活动引入概念

比如：科幻设疑

“在2100年，人类居住的楼房开始向地下发展，这个时候建筑师们遇到一个难题了，他们只知道过去我们都是只有1、2、3、100……（层），但是现在的他们不知道到底应该如何称呼地下的楼层？如果还是像过去那样，人们就不知道第10层的一个房间到底是在地上10层还是在地下10层了？小朋友们，你们可以想出一个好办法吗？”

- 第二阶段：在过程中概括概念

通过上面的问题，引导学生在思考和讨论的过程中，把握核心词句——“地上”、“地下”；“10层（一个数字），到底是地下第10层，还是地上第10层？（有了相区别的实际意义）”

- 第三阶段：直面概念对象，进行数学化的提炼

【解答】：引入“-”号，读作“负”多少？比如一个客人要去地下10层，建筑师们就可以在楼层上标注“-10层”；相应的，如果是去地上10层，就是“+10层”（加号可省略）；

我们可以称这些与正数相对的数字标记的方法为“负数”，而**负数表示的实际含义是在以一个人为规定的刻度线为基准的前提下计数方向与正数相反的数。**

在上例中，“负10层”表示的就是与在地上的“正10层”高度一样的位于地下的那一层。

- 第四阶段：建立概念图式，加强综合运用，促进迁移

运用所学的负数知识，发明一套计数方法：

- 1) 财务报表：收入与支出；
- 2) 山的高度；
- 3) 综合运用：“我的一天”；

【评价】

基于APOS 理论的理念设计数学概念教学,强调的是“做中学”或“发现学习”

(3) 将数学史融入到概念教学中

教学中如果能展示学生所学数学概念产生与形成的历史背景和发展过程,学生就会产生浓厚的兴趣去追根溯源,探知前人的认知历程,弄清来龙去脉,更深刻地理解数学概念本质,这就需要数学史融入数学概念教学。

【 圆 】

- 情景展示：你能用一根长2 m的绳子在操场上画一个半径为2 m的圆吗？在学生说方案中概括出圆可以看作在同一平面内，一条线段绕着它固定的一个端点旋转一周，另一端点所经过的封闭曲线；

【 历史溯源 】

古代人最早是从太阳、月亮形状的启发中，以及在探索制作轮子的过程中，不断完善对“圆”的认识的。但会做圆并能了解圆的性质最早是要起源于我国墨子的定义：“一周同长也”。意思是说，圆有一个圆心，圆心到圆周的长都相等。这个要比希腊数学思想家欧几里得的定义早100多年。

