

數學課程與教師專業發展——基於教學實踐的認識

北京教育科學研究院 康傑

一定要學數學嗎？



數學教師的存在意義



3

數學教師的存在意義

一問：何人能做數學教師？

二問：數學教師應該會什麼？

三問：數學教師幫助學生什麼？

4

數學教學改革的現象

教學方式
44+1, 學案導學, ...



數學課程

待融合

學習者

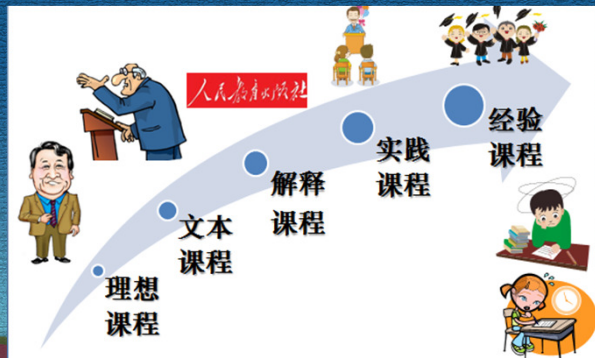


5

三個主題

- 一、數學課程的一般結構
- 二、教師的數學課程理解
- 三、數學教學的專業本領

數學課程的“層次說”



一、數學課程的結構—“核心說”

i 課程目標	ii 課程設置
iii 課程內容	iv 教學要求
v 課程計劃	

i 數學課程目標

目標1：使學生獲得社會生活、實踐活動以及在數學或者相關學科中繼續學習所必需的重要的數學知識、必要的應用技能和基本的數學思想。

i 數學課程目標

目標2：培養學生運算、空間想像、資料處理、數學推理和問題解決的能力，以及合作交流、獨立思考的能力。

i 數學課程目標

目標3：通過參與觀察、實踐、思考、探索、交流等數學活動，發展學生靈活運用數學思維判斷問題的意識和能力。

i 數學課程目標

目標4：培養學生認識數學的價值，養成良好的學習習慣和科學態度，切實感受數學活動的興趣和數學的優越性。

i 數學課程目標

目標5：培養學生在富有想像力和創造力的活動中，獲得**成功的體驗**，鍛煉克服困難的**意志**，成為**有信心、有創意的學習者**。

ii 數學課程的設置

數理倫理學 (數學基礎論)	集合論 (集合、順序)	代數學 (體、環、模)	群論 (有限群等)
整數論	幾何學	微分幾何學	代數幾何學
位相幾何學	解析	複變函數論	泛函分析
函數方程式論	特殊函數	數值解析	概率論
數學規劃		數學史與名家	

ii 數學課程的設置

數理邏輯與 數學基礎	數論	代數學	代數幾何
分析學	複分析	常微分方程與動力系統	偏微分方程
泛函分析	組合數學與圖論	拓撲學與幾何學	微分幾何學
概率論	數理統計	計算數學	控制論與資訊理論
運籌學			

ii 數學課程的設置

數與代數	圖形與空間
統計與概率	

ii 數學課程的設置

數與代數			圖形與空間		
數	式	方程	直線	三角形	四邊形
不等式	函數	...	圓	變換	...
統計與概率					

iii 數學課程的內容

數與代數：實數及其運算、整式及其運算、分式及其運算、二次根式及其運算、方程（低次）和方程組、不等式和不等式組（一次一元）、函數（低次）。

iii 數學課程的內容

圖形與空間：點、線、面，角，平行線，三角形，三角形的全等和相似，四邊形，圓，立體圖形初步，邊角相求，座標與變換，尺規作圖。

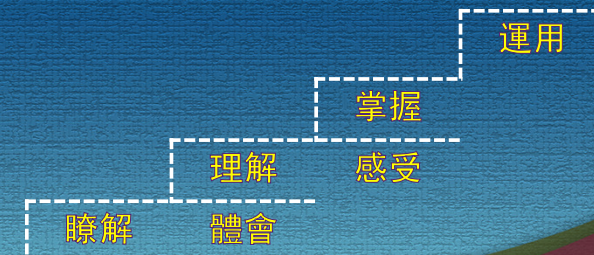
iii 數學課程的內容

統計與概率：統計初步（抽樣，統計圖，平均數、中位數、眾數、極差、方差、標準差、加權平均數等概念）。概率初步（隨機事件，概率與頻率）。

iv 數學課程的教學要求

對結果的表述	對過程的表述
瞭解	體會
理解	感受
掌握	—
運用	—

疑問：教學要求的關係和表現？



疑問：教學要求的關係和表現？



v 數學課程的計劃

要旨：“寬著期限，緊著課程”（宋朱熹）

關鍵：在固定的期限內，學習內容的呈現順序之設計至關重要。（設計的依據是什麼？）

二、數學教師的數學課程理解

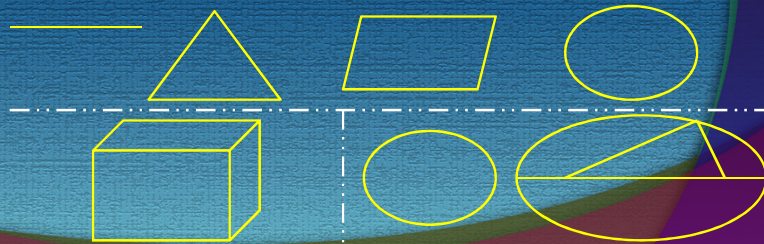
- (一) 如何整體把握數學課程
- (二) 數學課程改革歷史管窺
- (三) 發展中的數學課程
- (四) 數學課程的實踐觀

整體把握數學課程

- 強調全面把握數學課程的本體特性。
- 強調協調設計數學課程的構成要件。
- 強調細緻解析數學內容各要素特徵。
- 強調認識掌控數學內容諸要素相互關係與影響。

解讀：本體特性

平面幾何、立體幾何、解析幾何



27

解讀：本體特性

屬性	細目	平面幾何	立體幾何	解析幾何
公理化	概念			
	定理			
形式化	文字			
	圖形符號			
特徵		概念作為定理體系的一部分	概念幾乎不進入定理體系	方法強于概念和定理

28

解讀：構成要件

課程目標	課程設置
課程內容	教學要求
課程計劃	

課程目標的多樣性和達成度；課程設置的合理性；課程內容的確定性；教學要求的可操作性；課程計劃的科學性。

解讀：要素特徵

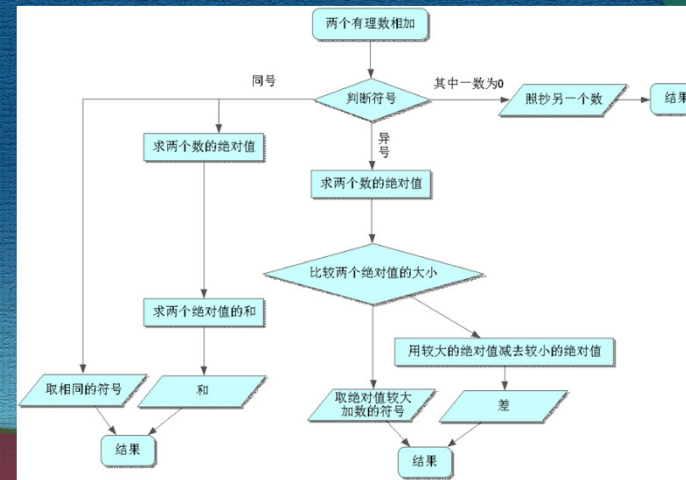
對知識要素知識、技能、能力、觀點等類別進行歸屬。
(布魯姆)

知識	認知	記憶	理解	應用	分析	評價	創造
事實性知識							
概念性知識							
方法性知識							
元認知知識							

解讀：要素特徵

“有理數加法法則”的類別：概念？程式？方法？觀點？

1. 同號兩數相加，取相同的符號，並把絕對值相加。
2. 絕對值不相等的異號兩數相加，取絕對值較大的加數符號，並用較大的絕對值減去較小的絕對值。互為相反數的兩個數相加得0。
3. 一個數同0相加，仍得這個數。



解讀：要素特徵

“二元一次方程組的解法”

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, & (1) \\ 7x - 2y = 15 & (2) \end{cases}$$

代入消元法、加減消元法與運算能力

33

解讀：運算能力

水準3—巧妙

水準2—熟練

普遍方法

水準1—正確

忽略法理

特殊結構

演算法+算理

熟能生快

34

解讀：推理能力

假期中小明和父母一起到甲、乙兩個城市旅遊，小明發現兩個城市中使用的人民幣的新舊程度不同：在甲城市中，面值10元、50元和100元的三種人民幣的新舊程度基本相同；在乙城市中，面值10元的人民幣比較舊，而面值50元和100元的人民幣比較新。你能通過這些資訊判斷兩個城市的發展水準哪個更高嗎？

35

解讀：畫圖技能

常規畫圖是幾何證明的首要環節。

四邊形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 交于点 E ,
 $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle CED = 45^\circ$, $\angle DCE = 30^\circ$,
 $DE = \sqrt{2}$, $BE = 2\sqrt{2}$.

求 CD 的长和四邊形 $ABCD$ 的面积.

36

解讀：關係與影響

A-1-6 瞭解平方根、算術平方根、立方根的意義，能用根號表示一個數的平方根、算術平方根和立方根。

A-1-7 瞭解開方與乘方互為逆運算，會用平方運算求某些非負數的平方根，會用立方運算求某些數的立方根；會用計算器求一個數的平方根和立方根。

A-1-8 瞭解無理數與實數的概念。

A-1-19 瞭解二次根式、最簡二次根式的概念，掌握二次根式的加、減運算法則；掌握二次根式的乘、除運算法則，會將分母中含有一個二次根式的式子進行分母有理化；能進行二次根式簡單的混合運算。

37

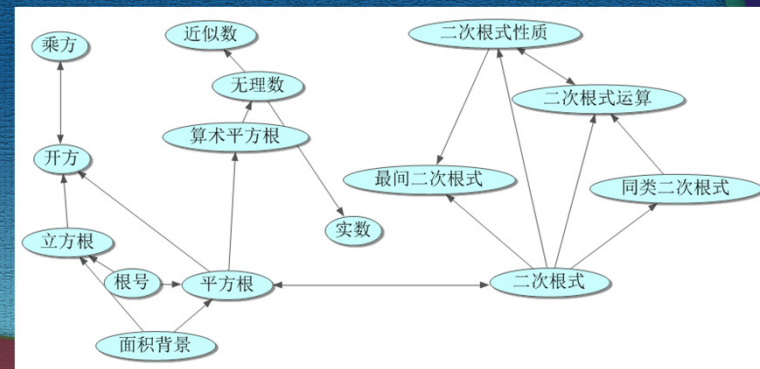
學習任務的分解

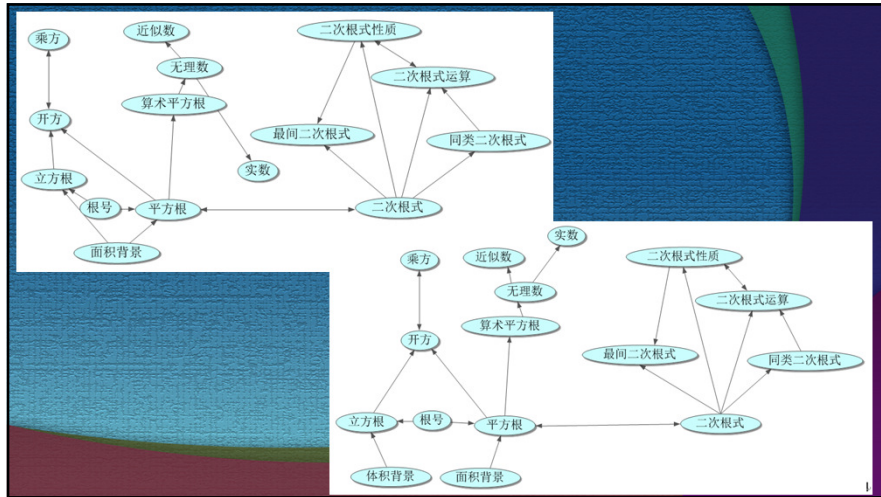
- 1、瞭解平方根、算術平方根、立方根的意義
- 2、能用根號表示一個數的平方根、算術平方根和立方根
- 3、瞭解開方與乘方互為逆運算
- 4、會用平方運算求某些非負數的平方根
- 5、會用立方運算求某些數的立方根
- 6、會用計算器求一個數的平方根和立方根
- 7、瞭解無理數與實數的概念
- 8、瞭解二次根式、最簡二次根式的概念
- 9、掌握二次根式的加、減運算法則
- 10、掌握二次根式的乘、除運算法則
- 11、會將分母中含有一個二次根式的式子進行分母有理化
- 12、能進行二次根式簡單的混合運算

知識要素的分解

本章節的知識要素(概念和原理)				
概念	平方根	算術平方根	立方根	根號
14	開方	逆運算	無理數	實數
	二次根式	最簡二次根式	同類二次根式	分母有理化
原理1	求平方根			
原理2	求立方根			
原理3	用計算器求平方根和立方根			
原理4	實數與數軸上的點一一對應			
原理5	求實數的相反數與絕對值			
原理6	用有理數估計一個無理數的大致範圍			
原理7	用計算器進行近似計算，並按問題的要求對結果取近似值			
原理8	二次根式的性質			
原理9	二次根式的運算法則			
原理10	平方根的性質			
原理11	立方根的性質			

知識要素的關係





知識要素的時間分佈

本章節的課時安排和內容分佈					
課時編號	1	2	3	4	5
要素與原理	平方根 開平方 求平方根 平方根的事實	算術平方根 求平方根 求算術平方根	立方根 開立方 求立方根 立方根的事實	計算器開方	無理數 表示無理數
課時編號	6	7	8	9	10
要素與原理	實數 求實數絕對值 求實數相反數 實數比較大小 實際問題	實際問題 實數比較大小	二次根式 二次根式有意義 二次根式的基本性質 因式分解	二次根式的重要性質 化簡-重要性質應用	二次根式的乘法法則 二次根式的乘法性質 法則和性質應用
課時編號	11	12	13	14	15
要素與原理	二次根式的除法法則 二次根式的除法性質 最簡二次根式 分母有理化 乘除法計算和化簡	同類二次根式 化簡和計算	綜合計算 分母有理化	?	?

知識要素的要求層次

	課時分佈 (填寫課時編號)	課標要求 (ABCD)	教學需要 (ABCD)	分層檢測 (ABCD)
平方根	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8	A	B	
算術平方根	2, 4, 5, 6, 7	A	B	
立方根	3, 4, 6, 7	A	B	
根號	2, 3, 4, 5, 6, 7	?	B	
開方	1, 3, 4, 7	A	B	
逆運算	?	A	B	
無理數	5, 6, 7	A	B	
實數	6, 7	A	B	
二次根式	8	A	B	
最簡二次根式	8, 11	A	B	
同類二次根式	8, 12	A	B	
分母有理化	13	A	B	

單一課時的重難點分析

課時編號	教學重點	教學難點
1	平方根	平方根的事實
2	算術平方根	求算術平方根
3	立方根	立方根的事實
4	計算器開方	
5	無理數	表示無理數
6	實數	實數比較大小
7		實際問題
8	二次根式	二次根式有意義、二次根式的基本性質
9	二次根式的重要性質	化簡-重要性質應用
10	二次根式的乘法法則	二次根式的乘法性質、法則和性質應用
11	二次根式的除法法則	二次根式的除法性質、乘除法計算和化簡
12	同類二次根式、化簡和計算	化簡和計算
13	分母有理化、綜合計算	綜合計算

(二) 數學課程改革歷史管窺

“如果我們希望預知數學的將來，
適當的途徑是研究這門學科的歷
史和現狀” ——龐加萊

(二) 數學課程改革歷史管窺

- 中國數學課程改革簡史
- 基礎教育改革發展簡史
- 數學發展簡史

基礎教育改革的歷史軌跡



47

(二) 數學課程改革歷史管窺

- 課程目標的變化
- 能力目標的出現
- 教學要求（層次）

課程目標的變化

- 1、使學生能依據數理關係，推求事物當然的結果。
- 2、供給研究自然科學的工具。
- 3、適應社會上生活的需求。
- 4、以數學的方法，發展學生論理的能力。——1923

《新學制課程標準綱要》

課程目標的變化

- 1、瞭解形與數之性質及關係，並知運算之原則與方法。
- 2、供給日常生活中數學之知識，及研究自然環境中數量問題。
- 3、訓練關於計算測量之工具及作圖之技能，有計算準確迅速及精密整潔之習慣。
- 4、培養以簡禦繁以已知推未知之能力。——1948《修訂初級中學數學課程標準》

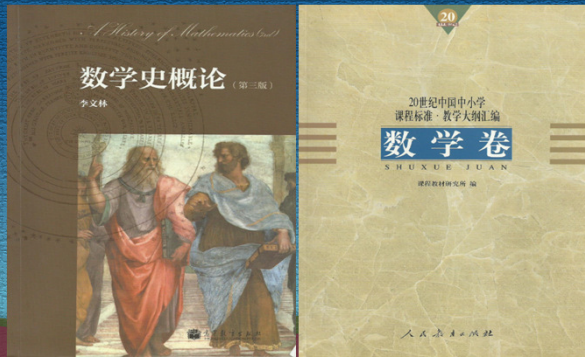
能力目標的出現

- 中學數學教學的目的是教給學生有關算術、代數、幾何和三角的基礎知識，培養他們應用這些知識解決實際問題的技巧和技巧，發展他們的邏輯和空間想像力。——1956《中學數學教學大綱（修訂草案）》
- 正確而且迅速的計算能力、邏輯推理能力和空間想像能力——1963《全日制中學數學教學大綱（草案）》

教學要求（層次）的明確

- “理解”、“掌握” ——1963
- “瞭解”、“初步瞭解” ——1978
- 第一次界定“瞭解”、“理解”、“掌握”、“靈活運用” ——1988

(二) 數學課程改革歷史管窺



(二) 數學課程改革歷史管窺

研究的意義

凡教算學者，其講算術，解說務須詳明，立法務須簡捷，兼詳運算之理，並使習熟於運算。——《奏定中學堂章程》光緒二十九年

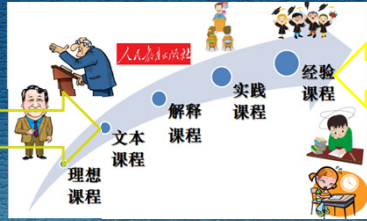
(三) 發展中的數學課程

- 國家、社會對人才應具有的數學才能，二十一世紀人才的特徵。
- 發達國家（或地區）數學改革經驗
“他山之石可以攻玉”——新數學運動、回到基礎、問題解決、標準運動。

(三) 發展中的數學課程



(四) 數學課程的實踐觀



應該是什麼

實際是什麼

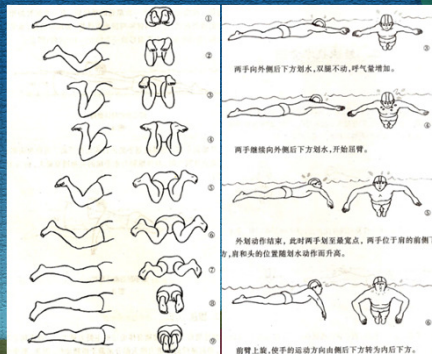
(四) 數學課程的實踐觀

應該是什麼—實際是什麼=?

數學課程的變革既要演繹，也要歸納，務必重視學習者的表現。

三、數學教學的專業本領

专业知识 专门技能



三、數學教學的專業本領

《中學教師專業標準（試行）》

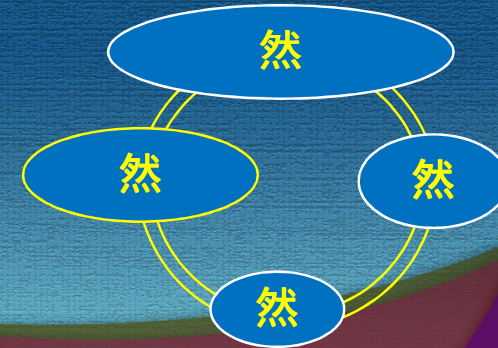
維度	領域
二、專業知識 18	(五) 教育知識 (6)
	(六) 學科知識 (4)
	(七) 學科教學知識 (4)
	(八) 通識性知識 (4)

三、數學教學的專業本領

維度	領域
三、專業能力 25	(九) 教學設計 (3)
	(十) 教學實施 (5)
	(十一) 班級管理與教育活動 (7)
	(十二) 教育教學評價 (3)
	(十三) 溝通與合作 (4)
	(十四) 反思與發展 (3)

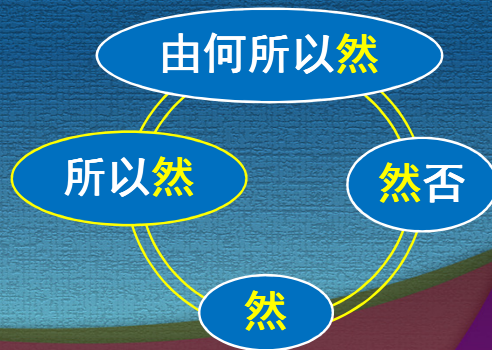
三、數學教學的專業本領

“四然”



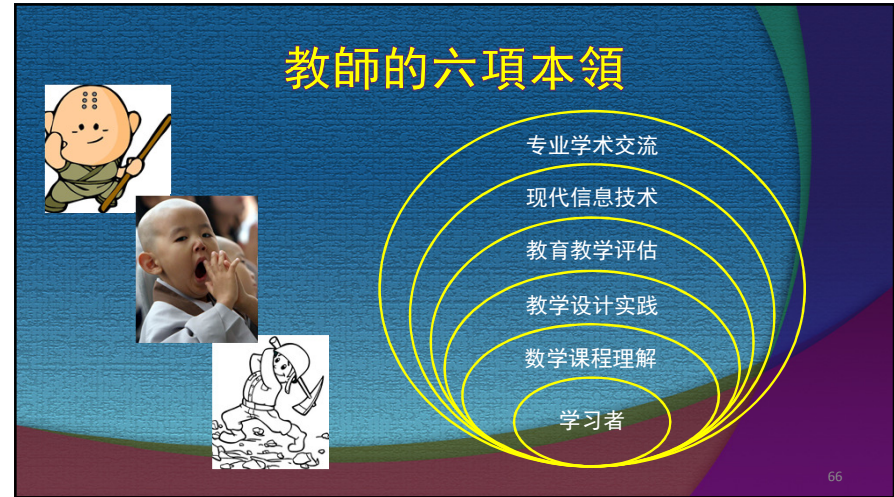
三、數學教學的專業本領

“四然”



課程理解是教師心底的智慧

	類別	方向	思考	建議
課程理解 課程分析	然 (弄清“是什麼?”) 所以然 (明白“為什麼是? 如何是?”)	要點	學習重點是什麼? 非重點內容是什麼?	教材是參照物
		要素	要點和要素之間的關係?	
教學智慧 設計實踐	由何所以然 (用什麼方式、方法、手段使學生通曉)	結構	知識呈現或揭示的順序如何?	注意教學原則、活動特徵、學習者分析的指導作用
		特徵	學習活動的類別和顯著特點	
教學評價	然否 (測量學生是否實現然、所以然, 改進教學設計)	影響	學習活動之間的聯繫和影響	備註教育目標分類學
		分層	從知識分類和能力表現角度的測試和分析	



本領一 對學習者的研究

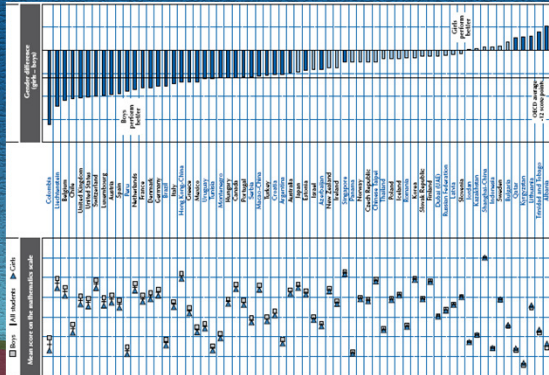
- ◆心理發展認知結構論：J. 皮亞傑，兒童心理發展的四個階段（感知運動階段0-2、前運算階段2-7、具體運算階段7-12、形式運算階段12-15）
- ◆心理發展精神分析論：S. 佛洛德，伊特 (id) 快樂原則、自我 (ego) 現實原則、超我 (super ego) 完美原則，相互衝突，產生焦慮
- ◆心理發展刺激反應論：J. B. 沃森、B. F. 斯金納，兩種學習途徑①條件反射：獎勵與懲罰；②觀察。

本領一 對學習者的研究

Programme for International Student Assessment (2009)^{[10][11]}
(OECD members as of the time of the study in boldface)

Maths		Sciences		Reading	
1	Shanghai, China 600	1	Shanghai, China 575	1	Shanghai, China 556
2	Singapore 562	2	Finland 554	2	South Korea 539
3	Hong Kong, China 555	3	Hong Kong, China 549	3	Finland 536
4	South Korea 546	4	Singapore 542	4	Hong Kong, China 533
5	Taiwan 543	5	Japan 539	5	Singapore 526
6	Finland 541	6	South Korea 538	6	Canada 524
7	Liechtenstein 536	7	New Zealand 532	7	New Zealand 521
8	Switzerland 534	8	Canada 529	8	Japan 520
9	Japan 529	9	Estonia 528	9	Australia 515
10	Canada 527	10	Australia 527	10	Netherlands 508
11	Netherlands 526	11	Netherlands 522	11	Belgium 506
12	Macau, China 525	12	Liechtenstein 520	12	Norway 503
13	New Zealand 519	13	Germany 520	13	Estonia 501
14	Belgium 515	14	Taiwan 520	14	Switzerland 501

本領一 對學習者的研究



69

對學習者的關注

計算： $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$

70

對學習者的關注

計算： $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$

71

對學習者的關注

計算： $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$
 解：公分母為 x^2-4
 $2x = x+2$
 移項得
 $2x-x=2$
~~計*~~
~~換~~
 $x=2$

72

對學習者的關注

計算: $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$.

解: $= \frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{x-2}$
 $= \frac{2x - (x+2)}{(x+2)(x-2)}$
 $= \frac{2x - x - 2}{(x+2)(x-2)}$
 $= \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} \quad x \neq \pm 2$

73

對學習者的關注

計算: $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$.

解: 原式 = $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{x+2}{x^2-4}$
 $= \frac{x+2}{(x-2)(x+2)}$
 $= \frac{1}{x-2}$

74

對學習者的關注

解: $\frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{x-2}$
 $= \frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{x+2}{(x+2)(x-2)}$
 $= \frac{2x - x - 2}{(x+2)(x-2)}$
 $= \frac{(2x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)}$
 $= \frac{2x-x-2}{x^2-4}$

75

對學習者的關注

計算: $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$.

解: 原式 = $\frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{x-2}$
 $= \frac{2x - (x+2)}{(x+2)(x-2)}$
 $= \frac{2x - x - 2}{(x+2)(x-2)}$
 $= \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2}$

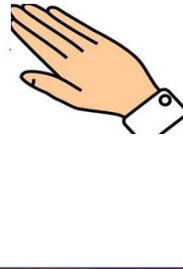
\therefore 原式 = $\frac{1}{x+2}$

76

對學習者的關注

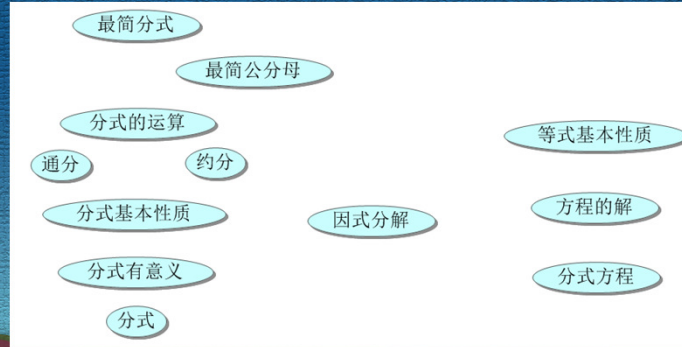
計算： $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$

解：原式 = $\frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{x-2}$
 $= \frac{2x - (x+2)}{(x+2)(x-2)}$
 $= \frac{2x - x - 2}{(x+2)(x-2)}$
 $= \frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$



77

對學習者的關注



78

本領二 數學課程理解

i 課程目標	ii 課程設置
iii 課程內容	iv 教學要求
v 課程計劃	

- 整體觀
- 歷史觀
- 發展觀
- 實踐觀

79

本領三 教學設計與實踐

- 教學設計是指運用系統方法，將學習理論與教學理論的原理轉換成對教學資料和教學活動的具體計劃的系統化過程。——史密斯·雷根1993年
- 概言之：理論聯繫實踐。

80

本領三 教學設計與實踐

- **有關理論**：教學論、學習論、心理學、數學、資訊傳播學、系統論等。
- **學習論**：發現學習、接受學習、指導學習、掌握學習；意義學習和機械學習、集中學習和分散學習、整體學習和部分學習。

81

本領三 教學設計與實踐

- **教學論（教學方式）**：暗示教學、程式教學、範例教學、分組教學、個別教學、啟發式教學、協作教學、指導教學、注入式教學等等；
- **教學方法**：複習法、講讀法、講授法、練習法、談話法、設計教學法、實驗教學法、數學教學法、演示法、閱讀指導法。

82

本領三 教學設計與實踐

巴班斯基的教學過程最優化理論

對教學過程最優化：內容與活動相結合；教師與學生在活動中相互影響；具體化教學任務到間接控制學生的學習活動。

83

本領三 教學設計與實踐

教學過程最優化的環節

- ①掌握教學的具體任務和目的並使之具體化；
- ②研究學生的特點使教學內容具體化；
- ③選擇教學手段，選擇教法和具體形式；
- ④執行計劃；
- ⑤對執行情況進行檢查，隨機調整教學進程；
- ⑥分析教學效果為下一輪過程提供參考。

84

本領四 教育教學評估

S -R=I

應該是什麼—實際是什麼=?

- 評估的目的不是“證明”!
- 評估的目的是“診斷”和“改進”。

85

本領四 教育教學評估

計算： $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$

題目控制表

涉及的知識要素和水準	
考查的核心能力	
題幹的特徵	
答案的特徵	
學生易錯之處	

86

本領四 教育教學評估

十個關鍵問題：

- ①如何定義？
- ②功能是什麼？
- ③物件有哪些？
- ④每個物件應收集什麼樣的資料？
- ⑤用什麼指標來評判評估物件的價值和優點？
- ⑥為誰服務？
- ⑦評估的過程是怎樣的？
- ⑧評估的方法有哪些？
- ⑨誰來做評估？
- ⑩用什麼標準對評估進行再評估？

——內伏 (Nevo)

87

本領四 教育教學評估

布魯姆教育目標分類（2001）的認知操作類型

認知類型	記憶	理解	應用	分析	評價	創造
子類型	辨認	解釋	執行	組織	檢查	假設
		舉例說明				
		歸類				
		概括				
	複現	闡述	推理	實施	歸因	設計
			比較			
論證			評價			
診斷						
重新設計	歸因	生產				
預測						

88

本領四 教育教學評估

示例1：下麵的四個圖形中，平行四邊形是第___個。



示例2：平行四邊形的定義是_____。

教育目標分類的認知操作理論不僅可以應用於診斷性評估，更可以應用與課堂教學和學習活動中。

89

本領五 現代教育技術



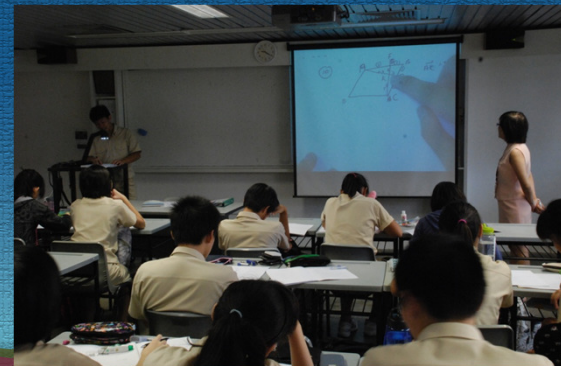
90

本領五 現代教育技術



91

本領五 現代教育技術



92

本領五 現代教育技術



93

本領五 現代教育技術



94

本領五 現代教育技術



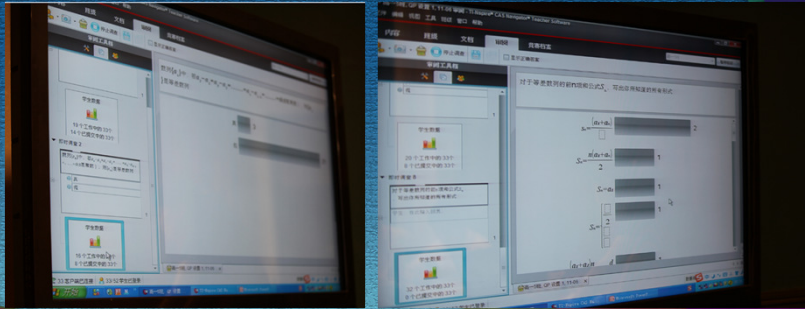
95

本領五 現代教育技術



96

本領五 現代教育技術



97

本領五 現代教育技術

- 對大多數學生而言，現代（手持）教育技術是延伸，而不是替代！
- 現代（手持）教育技術讓每間教室成為數學實驗室，創造開展多種學習活動的機會。

98

本領六 專業學術交流



99

本領六 專業學術交流



100

本領六 專業學術交流



101

本領六 專業學術交流

教師專業發展的策略：在交流中“反思+研究+同伴互助”。

《研究課》	《觀課報告》	《學習者調研》
《難點解決（個別輔導）》	《章節（專題）內容分析》	《學業分析報告（測試+分析）》
《主題特徵揭示與重要資訊推送》	《教學設計》	《專業知識講座、專門技能研訓》
課外閱讀指導	規範課題研究

102

一個人遇到好老師是一生的幸運，一個學校擁有好老師是一個學校的光榮。一個民族源源不斷湧現出一批又一批好老師，是民族的希望。——習近平

非常謝謝您的參與！
kangjie@bjedu.gov.cn